**Республиканская конференция-фестиваль творчества обучающихся «EXCELSIOR - 2018»**

**Секция: МАТЕМАТИКА**

# КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ ?

**Сведения об авторе:**
Агеева Екатерина Сергеевна, МБОУ «Яльчикская СОШ»,10 класс
**Научный руководитель:**
Агеева Лариса Николаевна, учитель математики
МБОУ «Яльчикская СОШ».

**Введение.** В 10 классе мы приступили к изучению раздела математики, который называется «Математический анализ». Изучая тему «построение графика функций с помощью производной » я задалась вопросом: зачем нужно исследовать функцию? Ведь можно просто выбрать точки (аргумент) и вычислить значения функции в этих точках, затем отметить их в координатной плоскости и соединить плавной линией.

Однако выяснилось, что такой способ годится лишь для построения простых графиков, в большинстве же случаев он просто не приводит к желаемой цели. Он не позволяет определить интервалы возрастания и убывания функции, ее выпуклость и вогнутость или найти асимптоты. Поэтому это и стало проблемой моего исследования. Более того, в дальнейшем оказалось, что задача построения графика функции – это совсем не простое дело. Скорее, это небольшая научная работа, являющаяся **актуальной**, так как свойства функций используются для решения задач повышенной сложности и в заданиях ЕГЭ.

Исходя из актуальности темы, я поставила перед собой следующие **цели** и **задачи**:
- собрать, изучить и систематизировать материал о производной;
- рассмотреть, как производная используется при построении графиков;
- усовершенствовать свое умение в применении дифференциального исчисления для исследования элементарных функций;
-изучить соответствующие теоретические материалы, позволяющие проводить полное исследование функции для построения графиков;
-изучить план полного исследования функции;
- систематизировать свои знания о функции, как важнейшей математической модели;
-заинтересовать и научить одноклассников строить графики.

Таким образом, **объектом** моего исследования стали функции, которые я буду решать с помощью производной с целью получения более точного результата.

А **предметом исследования** выступили графики функций.

**Методы исследования**: решение примеров на построение графиков, сравнение, анализ, обобщение.

Построение графиков функций для меня одна из интереснейших тем в школьной математике. Один из крупнейших математиков нашего времени Израиль Моисеевич Гельфанд писал: «Процесс построения графиков является способом превращения формул и описаний в геометрические образы. Это – построение графиков – является средством увидеть формулы и функции и проследить, каким образом эти функции меняются».

При сдаче ОГЭ по математике девятиклассники в задании №23 должны уметь строить и читать графики. Поэтому я решила предложить им построить графики некоторых непростых функций для того, чтобы сравнить, как будут выглядеть их графики и мои. Ведь я теперь умею строить графики, проводя полное исследование функции, а они пока с математическим анализом не знакомы.

Результат оказался интересным. При построении дробно-рациональных функций девятиклассники либо не проводили асимптот, либо проводили, но только вертикальные. А о возможности существования горизонтальных и наклонных асимптот даже не догадывались. Строя график с помощью составления таблицы, не всегда понятно, какие именно точки нужно соединять. Где точки максимума или минимума, где выпуклости, а где вогнутости, есть ли асимптоты и многое другое. Таким образом, я все-таки решила, что для более точного построения графиков желательно проводить полное исследование функции. Но для этого одних школьных знаний мне тоже было недостаточно. Я искала и изучала дополнительную литературу. В этом мне помог мой руководитель Лариса Николаевна и брат, который учится на первом курсе технического ВУЗа.

Очень увлекательным и интересным оказалось построение графиков функций при помощи исследования. Каждый раз, глядя на функцию, я пыталась представить, как же он может выглядеть, но угадать не удавалось. Они удивляли меня своей непредсказуемостью.

Итак, поскольку я изучаю в школе математику на базовом уровне, выполнение данной работы мне позволило узнать много нового в курсе математического анализа. Я считаю, что мною был внесен вклад в решение избранной проблемы путем изучения научной литературы, анализа выполненных работ девятиклассников, что позволило сделать вывод о том, что без знания математического анализа невозможно верно построить графики функций.

**Основная часть.** Решение различных задач из области математики, физики и техники приводит к установлению функциональной зависимости между участвующими в данном явлении переменными величинами. Если такую функциональную зависимость можно выразить аналитически, то есть в виде одной или нескольких формул, то появляется возможность исследовать ее средствами математического анализа. Имеется в виду возможность выяснения поведения функции при изменении той или иной переменной величины (где функция возрастает, где убывает, где достигает максимума и т.д.). Применение дифференциального исчисления к исследованию функции опирается на весьма простую связь, существующую между поведением функции и свойствами ее производной, прежде всего ее первой и второй производной.

В качестве введения в дифференциальное исчисление рассматриваются задачи, связанные с формированием основного понятия дифференциального исчисления. Многие задачи, разные по своему содержанию, приводят к необходимости рассмотрения предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Это, в частности, задачи о касательной к линии, о скорости неравномерного прямолинейного движения, и др.

1. Примеры, приводящие к понятию производной.

*Задача о скорости движущейся точки.* Пусть $s = v(t)$ представляет закон прямолинейного движения материальной точки. Это уравнение выражает путь $s$, пройденный точкой, как функцию времени $t$. Обозначим через $\Delta s$ путь, пройденный точкой за промежуток времени $\Delta t$ от момента $t$ до $t + \Delta t$, т. е. $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

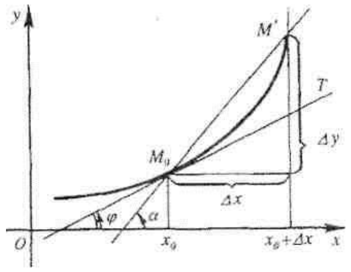
Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* точки за время от $t$ до $t + \Delta t$. Чем меньше $\Delta t$, т.е. чем короче промежуток времени от $t$ до $t + \Delta t$, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени $t$. Поэтому естественно ввести понятие скорости $v$ в данный момент $t$, определив ее как предел средней скорости за промежуток от $t$ до $t + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Величину $v$ называют *мгновенной скоростью* точки в данный момент $t$.

*Задача о касательной к данной кривой*. Пусть на плоскости $xOy$ кривая задана уравнением $y = f(x)$ . Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M_0(x_0,f(x_0))$.Так как точка касания $M_0$ дана, то для решения задачи потребуется найти угловой коэффициент искомой касательной, т.е. $tg\varphi$ - тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси $Ox$. Через точки $M_0(x_0,f(x_0))$ и $M'(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ проведем секущую $M_0M'$. Из рисунка видно, что угловой коэффициент $tg\alpha$ секущей $M_0M'$ равен отношению

$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.




Угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке может быть найден как tgφ=$\lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha$=$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Математическая операция, требуемая для решения рассмотренных выше двух задач, одна и та же. Выясняя аналитическую сущность этой операции, получаем.

Если существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, то этот предел называется *производной* от функции y=f(x) в данной точке x и обозначается через $y'$ или f '(x) *(*читается «игрек штрих» или «эф штрих от икс»): $y' = f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Угловой коэффициент касательной к кривой y = f(x)в точке с абсциссой x есть производная f '(x). В этом состоит геометрический смысл производной. [1,стр.347-352 ]

Когда-то Гете сказал: "Просто знать - ещё не всё, знания нужно использовать".

Схема полного исследования функции:

1. Область определения D(y).
2. Четность, нечетность функции.
3. Периодичность.
4. Точки пересечения с осями координат.
5. Промежутки знакопостоянства.
6. Исследование с помощью пределов (исследование на непрерывность, асимптоты)
7. Исследование с помощью первой производной (монотонность, экстремумы функции)
8. Исследование с помощью второй производной (точки перегиба, выпуклость функции.)
9. График.

Для использования схемы исследования функции мы должны знать, что

Областью определения функции называется множество значений независимой переменной, при которых функция определена. [3]

Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число T, что если $x$ принадлежит $D_f$, то $x \pm T$ также принадлежит $D_f$ и $f(x+T)=f(T)$.

Функция $y=f(x)$ называется четной, если $\forall x \in D_f \; f(-x) = f(x)$

Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если $\forall x \in D_f \; f(-x) = -f(x)$

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $y=0$, а ординаты точек пересечения графика функции с осью Oy находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $x=0$. [3]

Промежутки знакопостоянства — такие промежутки на области определения, в которых значения функции сохраняют свой знак (либо положительна, либо отрицательна). [3]

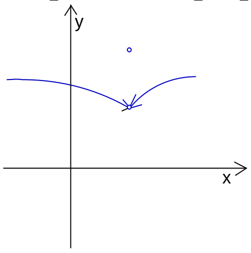
Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, если функция определена в точке $x_0$ и предел функции в точке $x_0$ равен значению функции в точке $x_0$.

$$x_0 \in D_f \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функции, непрерывные в каждой точке из области определения функции, называются ***непрерывными функциями***. [3]

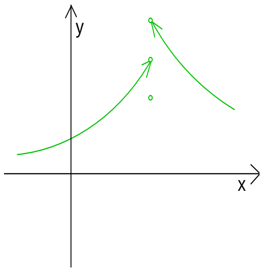
**Точкой разрыва функции** называется точка из области определения функции, в которой функция не является непрерывной.
Если в точке $x_0$ существуют конечные односторонние пределы функции, равные между собой, но не равные значению функции в точке $x_0$, то точка $x_0$ называется ***точкой устранимого разрыва***.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) \neq f(x_0)$$



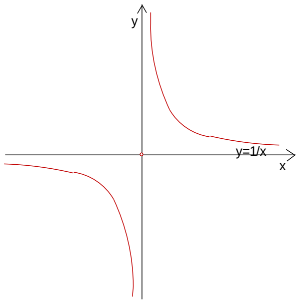

Если в точке $x_0$ существуют конечные односторонние пределы функции, не равные между собой, то точка $x_0$ называется ***точкой скачка (точкой разрыва* I *рода)***.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f(x)$$




Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке $x_0$ не существует или бесконечен, то точка называется ***точкой разрыва* II *рода***.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$$




Если существует прямая $y=kx+b$ такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ то эта прямая называется <u>асимптотой графика функции $f$</u> при $x \to +\infty$

Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$

Прямая $x=x_0$ называется <u>вертикальной асимптотой</u> графика функции при $x \to x_0$, если или $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \infty$

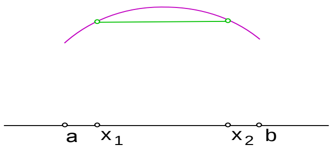
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a, b)$. Точка $x_0$ интервала $(a, b)$ называется <u>точкой строгого максимума (минимума)</u> функции $f(x)$, если в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$ $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Точки минимума и точки максимума функции называются ***точками экстремума*** функции.

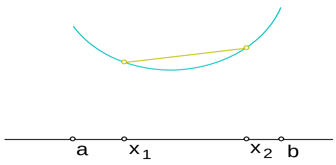
**Необходимое условие экстремума**. Пусть точка $x_0$ - точка экстремума функции. Тогда либо производная функции в этой точке равна 0, либо не существует.
Известно, что если $f'(x)>0$ ($f'(x)>0$) в $(a, b)$, то функция $f(x)$ <u>строго возрастает</u> <u>(строго убывает)</u> в $(a, b)$.

**Достаточное условие существования экстремума:** Пусть функция $y = f\left(x\right)$ непрерывна на интервале $\left(a, b\right)$, который содержит ее критическую точку $x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала, за исключением, быть может, самой точки $x_0$. Тогда, если при переходе этой точки слева направо знак производной меняется с плюса на минус, то это точка максимума, и, наоборот, с минуса на плюс – точка минимума. [3]

Функция $y=f(x)$, определенная на интервале $(a, b)$, называется ***выпуклой вверх*** (***вниз***) в интервале $(a, b)$, если для любых $x_1$и $x_2$ из интервала $(a, b)$ из того, что $x_1<x_2$, следует, что часть графика функции между точками $(x_1,f(x_1))$ и $(x_2,f(x_2))$ лежит выше (ниже) хорды, соединяющей эти точки.




функция выпукла вверх




функция выпукла вниз

Также говорят, что график функции $f\ (x)$ имеет на интервале $(a,\ b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах $(a,\ b)$ лежит не ниже (не выше) любой своей касательной. [3]

***Достаточное условие строгой выпуклости функции***

Если на интервале $(a,b)$ $f''(x)>0$, то на интервале $(a,b)$ функция выпукла вниз, и если на интервале $f''(x)<0$, то на интервале $(a,b)$ функция выпукла вверх.

Если в левой и правой полуокрестностях некоторой точки $x_0$ $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то точка $x_0$ – точка перегиба функции. [3]

**Заключение.** Анализ литературы позволил мне выявить наиболее обоснованную точку зрения, что для построения графиков более сложных функций необходимо ее исследовать. Изученный теоретический материал я применила при решении примеров из задачника Демидовича Б.П. (см. Приложения). Работа над содержанием темы «Как построить график функции?» повысил уровень моей математической подготовки, позволил решать задачи более высокой сложности по сравнению с обязательным курсом базового уровня. Кроме этого, я смогла заинтересовать данной темой еще несколько одноклассников и повысить не только свои, но и их знания о применении производной. Девятиклассники же увидев разницу между полученными ими графиками и моими, были удивлены. А результат моей работы для них стал мотивацией для изучения математики, как очень интересной, увлекательной и необходимой наукой. Безусловно, наши знания пригодятся нам и при сдаче ЕГЭ. Конечно, на этом изучение данной темы не заканчивается. Есть еще функции к изучению, которых мы не приступили. И я обязательно продолжу исследовать функции и строить их графики. Ведь "Просто знать - ещё не всё, знания нужно использовать", как говорил когда-то Гете.

**Библиографический список.**1)А.Г.Мордкович, П.В. Семенов: Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни), Москва 2014.
2) http://www.mathelp.spb.ru
3) http://www.mathprofi.ru
4)Задачник Демидовича Б.П. для втузов. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: Учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. Заведений / Под редакцией Демидовича Б.П. — М., 2001.
5)Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. –
М.: Просвещение, 1992